PACS: 42.25.Fx; 78.20.Bh

Уточнение ряда теоретических определений оптических свойств мутных сред на основе усовершенствованной двухпотоковой модели Кубелки-Мунка

Д. А. Рогаткин

«МОНИКИ» им. М.Ф.Владимирского, Москва, РФ

АННОТАЦИЯ

На основе недавно и кардинально усовершенствованной двухпотоковой модели Кубелки-Мунка (*Biomed. Eng., 41(2), 59-65, 2007*), которая позволяет теперь в одномерных теоретических задачах получать точные решения для прошедшего и обратно рассеянного потоков излучения на внешних границах мутных сред, был проанализирован и пересмотрен ряд важных теоретических определений оптических свойств мутных сред. Численными расчетами доказано, что чем больше поглощение света присутствует в рассеивающей свет среде, тем более ошибочные значения для транспортных оптических свойств получаются при использовании классического подхода и определений. В статье предложено новое строгое определение транспортного коэффициента рассеяния, поглощения и показано, что логически обосновано введение в теорию переноса двух дополнительных транспортных коэффициентов ослабления (АС) и обратного рассеяния (ВС) излучения. Отношение коэффициентов ВС/АС точно определяет в таком случае транспортное альбедо светорассеивающей среды.

Ключевые слова: теория переноса, оптические свойства, мутные среды, транспортный коэффициент, рассеяние, поглощение, альбедо, модель Кубелки-Мунка

Specification of a Number of Theoretical Definitions of Optical Properties of Turbid Media on a Base of Improved Two-Flux Kubelka-Munk Approach

D. A. Rogatkin

"MONIKI" named after M. F. Vladimirsky, Moscow, RF

ABSTRACT

On the base of the recently and totally improved two-flux Kubelka-Munk approach (*Biomed. Eng., 41(2), 59-65, 2007*) what now allows to obtain exact solutions for backscattered and transmitted radiation on external boundaries of a turbid medium in a one-dimensional theoretical problem some main definitions of optical properties of turbid media have been reanalyzed and revised. It is proved by numerical calculations that the more light absorption is presented in the scattering medium the more incorrect values can be obtained for transport optical properties using the classical approach and definitions. The article proposes new strict definition of the transport scattering coefficient as well as shows that it is more logically to introduce in the transport theory an additional transport attenuation coefficient (*AC*) and a transport backscattering coefficient (*BC*). In this case the ratio *BC/AC* defines exactly the transport albedo of the turbid medium.

ВВЕДЕНИЕ

Двухпотоковая одномерная транспортная модель Кубелки-Мунка (КМ) является наиболее широко используемым приближением теории переноса излучения (ТПИ) в современной оптике мутных сред ввиду ее простоты и существования в ней наглядных аналитических решений исходных дифференциальных уравнений [1, 2]. Более того, эта модель может считаться сегодня наилучшим приближением общего уравнения переноса излучения (УПИ) в одномерных теоретических задачах [3]. Однако до последнего времени было также хорошо известно, что классическая модель КМ не позволяет получать точные решения для потоков излучения внутри среды и на ее границах, особенно в случае сильно поглощающих и слабо рассеивающих свет сред [3, 4]. В большинстве публикаций по методу КМ *предполагается*, что для корректного применения уравнений КМ свет должен быть достаточно сильно (диффузно) рассеянным на поверхности и внутри среды. Более того, часто в научных публикациях акцентируется внимание на несоответствие транспортных коэффициентов уравнений модели КМ и общего УПИ. Давно устоявшимся мнением, вследствие появления около 40 лет назад практически одновременно и, видимо, независимо работ [5] и [6], является то, что соотношение между погонными транспортными коэффициентами поглощения и рассеяния классической модели КМ (K и S) и общего УПИ (μ_a и μ_s) может быть выражено, например, в следующем виде [6]:

$$K \approx 2\mu_a \; ; \tag{1}$$

$$S = \frac{3}{4}\mu_s - \mu_a \; . \tag{2}$$

где: K, S, μ_a и μ_s – суть транспортные коэффициенты, характеризующие погонное поглощение и рассеяние света в среде для модели КМ и общего УПИ соответственно.

Однако, если уравнение (2) требует выполнения лишь очевидного условия

$$\mu_a < \frac{3}{4}\mu_s \, , \tag{3}$$

что обычно трактуется как необходимость преобладания рассеяния над поглощением ($\mu_s >> \mu_a$), то уравнение (1), ввиду отсутствия в нем зависимости K от μ_s, выглядит полностью не логично. Дело в том, что в пределе $\mu_s \to 0$, очевидно, и решение КМ, и решение общего УПИ в ТПИ, если они получены корректно, должны сходиться к экспоненциальному закону Бугера с одним и тем же показателем ослабления в экспоненте. Не существует никаких аргументов, чтобы эти два аналитически строгих и точных одномерных решения при отсутствии рассеяния в среде давали в показателе экспоненты коэффициенты, различающиеся в 2 раза. Поэтому, либо $K = \mu_a$ всегда, а уравнение (1) ошибочно, либо коэффициент поглощения K модели КМ должен быть какой-то функцией μ_s. Такой, что, если $\mu_s=0$, то $K=\mu_a$ и закон Бугера записывается идентично для любого из указанных подходов, а если же $\mu_s \neq 0$, то K стремиться в пределе к $2\mu_a$ при $\mu_s >> \mu_a$ или, хотя бы, при достижении условия (3).

Этот и ряд других недостатков классической модели КМ служили и служат постоянно источниками непрерывных попыток улучшить ее точность и физическую интерпретацию на протяжении последних 50 лет [7-9]. Недавно нами было показано [10-12], что основная проблема классической модели КМ, также как и общего УПИ в ТПИ, заключена в неправильном исходном феноменологическом *предположении* о существовании в среде двух независимых друг от друга физических явлений и, соответственно, двух независимых друг от друга транспортных коэффициентов уравнений – поглощения и рассеяния. В общем случае светорассеивающей среды, когда в среде присутствует поглощение, первый коэффициент в правой части как системы уравнений КМ, так и общего УПИ, не может быть разделен на два независимых коэффициента – поглощения и рассеяния. Он должен рассматриваться как один объединенный *коэффициент ослабления* “β_1”. Погонный коэффициент поглощения ($K=\mu_a$) входит в β_1, также как и во второй коэффициент β_2 второго слагаемого правой части уравнений, но не аддитивно с параметрами, характеризующими рассеяние, а в виде их совместной и достаточно сложной функции. Без поглощения $K=0$ и $\beta_1=\beta_2=S$. Без рассеяния $S=0$, $\beta_2=0$ и $\beta_1=K=\mu_a$, как это и должно быть в рамках классических теорий для достижения идентичности закону Бугера. Но если одновременно в среде присутствуют и рассеяние и поглощение, то классическое феноменологическое предположение $\beta_1=K+\beta_2=K+S$ является неверным. Только если поглощение в среде является очень малым, стремящимся к нулю, существенно меньшим рассеяния, тогда классическое предположение

$$\beta_1=K+S\,, \tag{4}$$

как предельный случай малого поглощения, может иметь место при правильном выборе и определении параметра S.

Одним словом, предложенная недавно усовершенствованная модель КМ показала, что в классической ТПИ существует ряд некорректных и спорных феноменологических определений транспортных оптических свойств мутных сред. В качестве примера можно дополнительно указать на понятие транспортного альбедо (W_0) для одновременно светорассеивающей и поглощающей свет среды. Например, транспортное альбедо часто определяется по классике как отношение [3]

$$W_0=\beta_2/\beta_1=S/(K+S). \tag{5}$$

Но как было показано в работах [10-12], в общем случае одномерной светорассеивающей и поглощающей свет среды

$$\beta_2/\beta_1\neq S/(K+S). \tag{6}$$

Таким образом, возникает вопрос: какую часть соотношения (6) (левую или правую) методически правильнее рассматривать в качестве определения понятия транспортного альбедо? И что надо понимать под параметром S в (4)-(6) в свете результатов работ [10-12]?

В данной статье предпринята попытка более подробно рассмотреть и обосновать различия в значениях оптических транспортных свойств мутных сред на основе классического подхода и усовершенствованного подхода работ [10-12]. Высказанные аргументы позволяют предложить новые и более обоснованные определения для погонных транспортных коэффициентов рассеяния, поглощения и транспортного альбедо.

КЛАССИЧЕСКАЯ И УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ 2-х ПОТОКОВАЯ МОДЕЛЬ КМ

Исходное классическое приближение КМ является простейшей фотометрической моделью распространения излучения в одномерной светорассеивающей среде[1], которая вводит в рассмотрение два потока излучения – прямой $F_+(x)$ и обратный $F_-(x)$, распространяющиеся одновременно внутри среды в двух взаимно противоположных направлениях (рис.1). Оптические свойства такой среды описываются двумя погонными транспортными коэффициентами – поглощения (K) и рассеяния (S), которые являются известными по условию задачи и детерминированными числовыми коэффициентами исходной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dF_+(x)/dx = -(K+S)F_+(x) + SF_-(x) \\ dF_-(x)/dx = (K+S)F_-(x) - SF_+(x) \end{cases}. \tag{7}$$

Система (6) имеет известное точное и аналитическое решение для потоков $F_+(x)$ и $F_-(x)$:

$$F_+(x) = C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}\ ; \quad F_-(x) = C_1 A_- e^{-\alpha x} + C_2 A_+ e^{\alpha x}\ , \tag{8}$$

[1] Одномерность среды распространения излучения, т.е. рассмотрение распространение луча света только вдоль одной координатной оси «х» типично для большинства фотометрических задач и определяется так называемым *энергетическим подходом* в фотометрии, при котором не рассматриваются никакие волновые свойства излучения и, соответственно, не учитываются никакие «многомерные» процессы интерференции и дифракции излучения внутри среды.

где: C_1 и C_2 – константы интегрирования; $\alpha = \sqrt{K(K+2S)}$; $A_+ = S/(K+S-\alpha)$; $A_- = 1/A_+$. Обычно для различных практических приложений на основе (7) определяются обратно рассеянный поток $F_{bs}= F\_(0)$ или прошедший среду насквозь поток $F_\tau=F_+(H_0)$, где H_0 – толщина рассматриваемой одномерной среды распространения излучения (Рис.1).

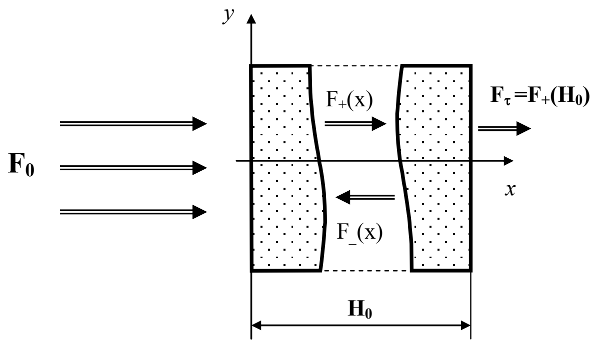


Рис. 1. Два взаимно противоположных потока внутри среды в модели КМ.

Модифицированная по [10] модель КМ оперирует понятиями погонного транспортного коэффициента поглощения $K=\mu_a$, коэффициента обратного отражения (рассеяния) излучения на единичной неоднородности R и погонной плотностью этих неоднородностей (рассеивателей) внутри среды - μ_ρ. Для нее система дифференциальных уравнений имеет более общий по сравнению с (7) вид:

$$\begin{cases} dF_+(x)/dx = -\beta_1 F_+(x) + \beta_2 F_-(x) \\ dF_-(x)/dx = \beta_1 F_-(x) - \beta_2 F_+(x) \end{cases}, \tag{9}$$

а в решении (8) параметры α и A_+ принимают исходную обобщенную форму:

$$\alpha = \sqrt{\beta_1^2 - \beta_2^2}\,;\; A_+ = \beta_2/(\beta_1 - \alpha)\,. \tag{10}$$

В отличие от упрощенной системы (7), как показано в цитируемом первоисточнике, в общем случае светорассеивающей среды с поглощением коэффициенты уравнений системы (9), связаны с исходными оптическими свойствами среды распространения излучения (μ_a, R и μ_ρ) более сложными соотношениями:

$$\beta_1 = \omega \cdot \frac{\mu_a - \mu_\rho \ln(1-R) + \mu_\rho \ln(1-\omega+\sqrt{\omega^2 - R^2 e^{-2\mu_a/\mu_\rho}})}{\sqrt{\omega^2 - R^2 e^{-2\mu_a/\mu_\rho}}}\;; \tag{11}$$

$$\beta_2 = R \cdot e^{-\mu_a/\mu_\rho} \cdot \frac{\mu_a - \mu_\rho \ln(1-R) + \mu_\rho \ln(1-\omega+\sqrt{\omega^2 - R^2 e^{-2\mu_a/\mu_\rho}})}{\sqrt{\omega^2 - R^2 e^{-2\mu_a/\mu_\rho}}}\;, \tag{12}$$

где: $$\omega = \frac{1-(1-2R)\cdot e^{-2\mu_a/\mu_\rho}}{2} .$$

Эти соотношения не разделяются естественным образом на два независимых транспортных коэффициента *K* и *S*, описывающие раздельно погонное поглощение и рассеяние в среде, как это было в классической модели (7). Соответственно, возникает серьезный вопрос, что понимать в (11) и (12) под понятием, например, транспортного коэффициента рассеяния *S*? Коэффициент β_2 по аналогии со вторым коэффициентом в (7)? Но β_2, во-первых, сложно и сильно зависит от погонного коэффициента поглощения $K=\mu_a$, не соответствуя никак (2), а, во-вторых, коэффициент β_1 оказывается не представим, как это было ранее в (4), в виде суммы

$$\beta_1 = \eta\cdot\mu_a + \beta_2,$$

где η – любая числовая константа по аналогии с (1), (2) или (7), т.к. из (11) и (12) однозначно

$$\beta_1 = \frac{\omega\cdot e^{\mu_a/\mu_\rho}}{R}\cdot\beta_2 \quad , \tag{13}$$

где $J = \dfrac{\omega\cdot e^{\mu_a/\mu_\rho}}{R}$ является несколько сегодня подзабытым фотометрическим инвариантом мутной среды (инвариантом Гершуна-Гуревича [13]), не зависящим от толщины среды H_0 и определяемым соотношением:

$$\frac{1+(F_{bs}/F_0)^2-(F_\tau/F_0)^2}{2(F_{bs}/F_0)} = J = const \tag{14}$$

в котором: F_0, F_{bs} и F_τ - исходный (освещающий), обратно рассеянный и пропущенный средой насквозь потоки излучения. Тогда как же грамотно определять транспортное альбедо?

ТРАНСПОРТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ МОДЕЛИ

Исследуя различные приближения и разные предельные случаи для значений коэффициентов β_1 и β_2, в цитируемых работах было показано, что при отсутствии поглощения ($K=\mu_a=0$) в среде с многократным рассеянием [11]:

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{R\mu_\rho}{1-R} \quad ,$$

что в точности соответствует пределу (11) и (12) при $\mu_a\to 0$, т. е.

$$\lim_{\mu_a\to 0}\beta_1 = \lim_{\mu_a\to 0}\beta_2 = \frac{R\mu_\rho}{1-R} \quad .$$

Введем далее обозначение для этого случая:

$$\frac{R\mu_\rho}{1-R} \equiv S_m \,. \tag{15}$$

Приближение однократного рассеяния при любом сколь угодно большом μ_a дает значения [12]:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \mu_a - \mu_\rho \cdot \ln(1-R) \\ \beta_2 &= \frac{R \cdot e^{-\mu_a/\mu_\rho}}{1 - R \cdot e^{-2\mu_a/\mu_\rho}} \cdot (2\mu_a - \mu_\rho \ln(1-R)) \end{aligned} \quad , \tag{16}$$

где в первом уравнении для β_1 можно было бы положить K=μ_a, обозначить

$$S = -\mu_\rho \cdot \ln(1-R) \equiv S_1 \tag{17}$$

и считать выполненным условие (4), но при этом оказывается $\beta_2 \neq S$ и остается проблема определения альбедо.

И, наконец, при отсутствии рассеяния в среде (R=0 или μ_ρ=0) в пределе S=$\mu_s \to 0$ выражения (11) и (12) дают значения коэффициентов:

$$\beta_1 = \mu_a \quad ; \quad \beta_2 = 0 \ , \tag{18}$$

как это и должно быть для идентичности закону Бугера в среде с идеальным поглощением.

Что же тогда, исходя из полученных результатов (15)-(18), грамотно выбрать в качестве определения для понятия погонного транспортного коэффициента рассеяния S? Если исходить из пожеланий иметь для характеристики мутной среды некий транспортный коэффициент, характеризующий рассеяние вне зависимости от поглощения, то на данную роль могут с одинаковым успехом претендовать определения (15) и (17). Если же исходить из логики классической модели КМ и систем уравнений (5)–(8), за параметр рассеяния следовало бы принять транспортный коэффициент β_2, но при этом сохранится его сложная зависимость от μ_a.

Аналогично, вообще говоря, несколько вариантов выбора существует и для транспортного коэффициента поглощения. Например, можно взять определение (1), т.е. предложить по определению в качестве транспортного коэффициента поглощения модели КМ величину $K = 2\mu_a$. Можно пойти более логичным путем и принять в качестве определения более понятную величину $K = \mu_a$ на основе результатов [10-12]. Правда, это будет звучать диссонансом к массе выпущенных публикаций по этой тематике за последние 40 лет. Можно, видимо, предложить и другие варианты определений, однако, скорее всего, никак нельзя ни в каком разумном виде для всех возможных вариантов получить (4), как это было *интуитивно предложено* в классической модели КМ.

Но еще более сложная ситуация складывается с понятием транспортного альбедо.

Принимая классическое определение

$$W_0=S/(K+S)\ , \tag{19}$$

мы попадаем в состояние неопределенности не только с выбором величин K и S (см. выше), но и с тем, какую физическую интерпретацию несет в себе такое «хитроумное» и искусственно скомпонованное с разными S и K из разных приближений альбедо. Выбирая же логику классических моделей ТПИ, где в общем случае альбедо, тем не менее, определялось простым отношением второго и первого коэффициентов правых частей исходных дифференциальных уравнений, т.е.

$$W_0^*=\beta_2/\beta_1\ , \tag{20}$$

мы приходим с учетом новых результатов (11)-(12) к очевидному неравенству (6), опять же противоречащему классическим представлениям.

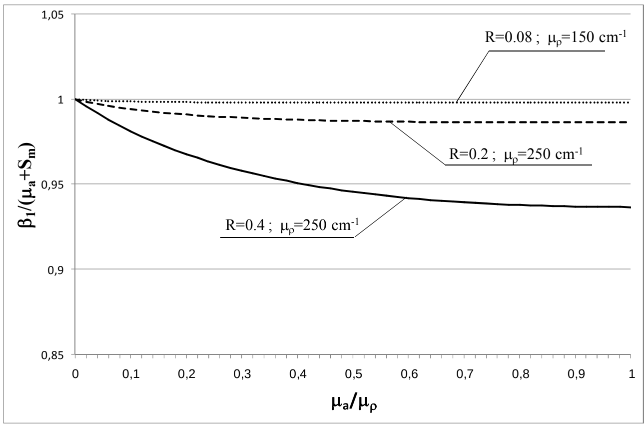
АРГУМЕНТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

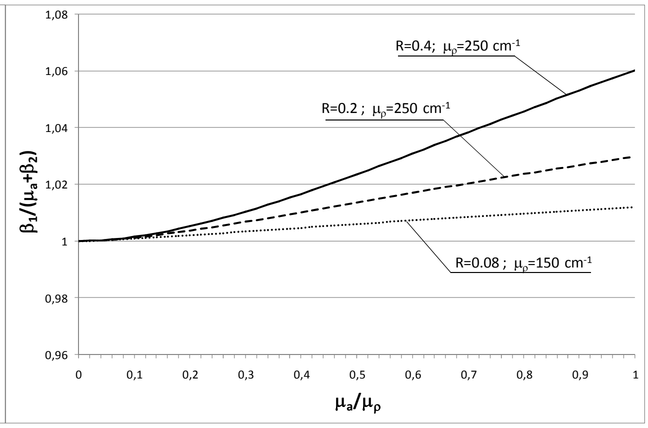
Размышляя над указанной проблемой, интересно посмотреть на численные отличия предлагаемых в качестве определений величин на примере решения какой-либо конкретной числовой задачи (примера). Насколько сильно могут отличаться числовые значения транспортных коэффициентов уравнений при их разном теоретическом определении для разного набора исходных оптических параметров среды - R, μ_a и μ_ρ? Имеет ли смысл вообще задумываться над разными определениями, или, например, числовые отличия между ними окажутся пренебрежимо малыми?

В качестве примера графики на рис. 2 иллюстрируют фрагмент полученных нами результатов для величины отношения первого транспортного коэффициента уравнений β_1 по (11) к его возможным другим значениям на основе классических и других потенциально возможных априорных представлений. Графики рис. 3 дают аналогичные представления о числовых значениях второго транспортного коэффициента уравнений β_2 на основе (12) по отношению к значениям транспортного коэффициента рассеяния по (15) или (17). Различия для разных определений транспортного альбедо представлены на рис. 4.

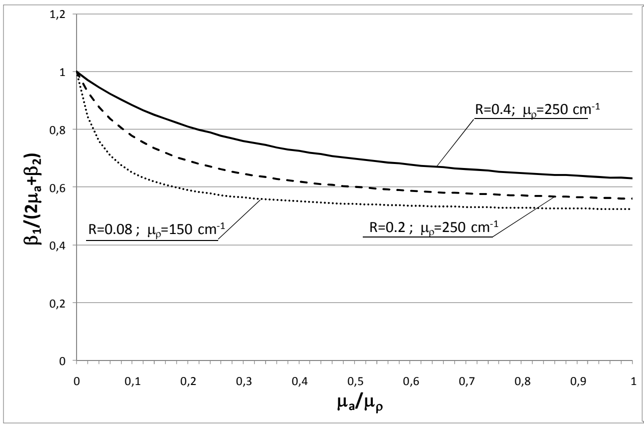
Во всех приведенных примерах прослеживаются уверенные и существенные различия числовых значений параметров для разных определений, которые графически характеризуются отклонением вычисленных отношений от единицы. Причем эти различия практически во всех случаях, кроме графиков рис. 2d, усиливаются с увеличением поглощения в среде. В общем случае разница в значениях колеблется от нескольких процентов до 12-15% и более, т.е. пренебрегать ей, вообще говоря, при решении любой задачи на рассеяние никак нельзя.

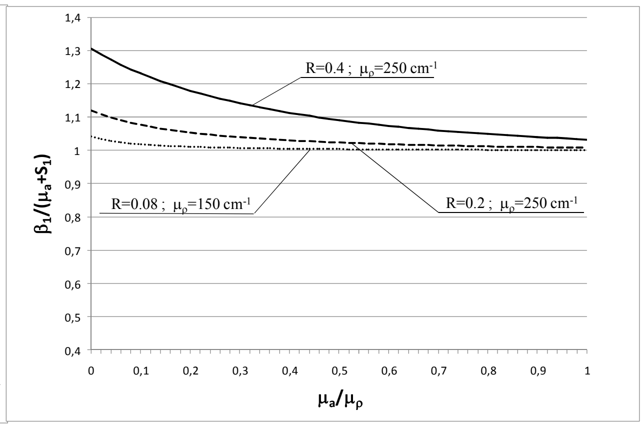
.





. a) b)





.

c) d)

Рис. 2. Величина отношения первого транспортного коэффициента уравнений (транспортного коэффициента ослабления) β_1 по (11) к его возможным другим значениям на основе классических и других потенциально возможных априорных представлений.

a) b)

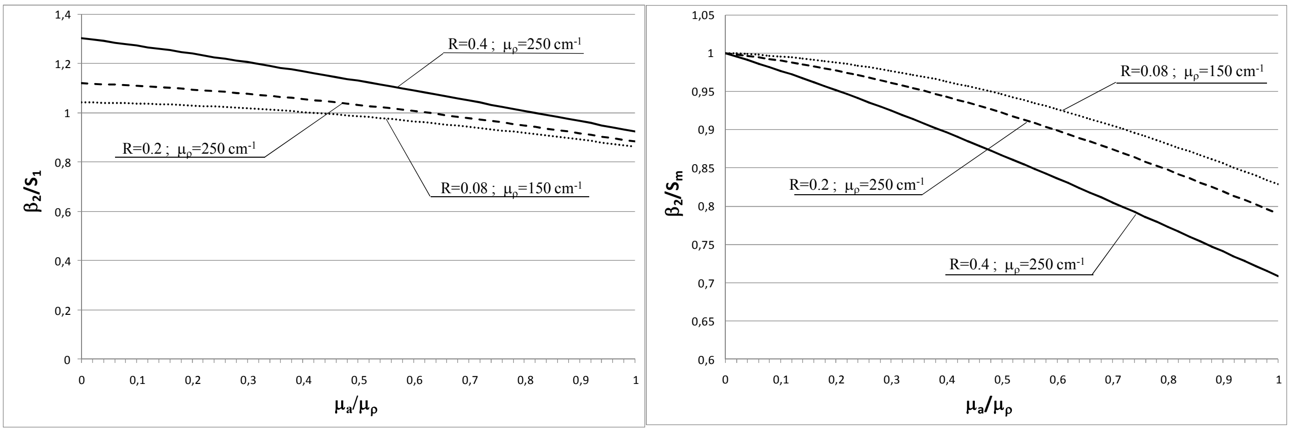


Рис. 3. Отношение второго транспортного коэффициента уравнений к транспортному коэффициенту рассеяния в зависимости от разных определений коэффициента рассеяния.

.

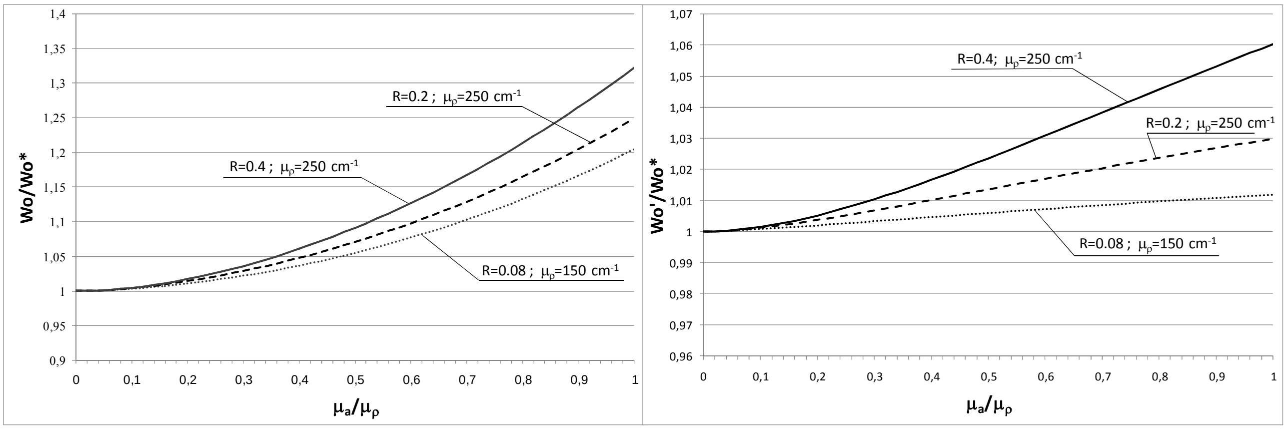


Рис. 4. Различия в значениях транспортного альбедо для его разных определений:
$W_0=S_m/(\mu_a+S_m)$; $W_0^*=\beta_2/\beta_1$; $W_0'=\beta_2/(\mu_a+\beta_2)$.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

По нашему мнению в работах [10-12] были получены весьма интересные, новые и не тривиальные результаты, заставляющие серьезно задуматься над корректностью ряда определений в классической ТПИ мутных сред. Приведенные выше аргументы теоретического плана, а также конкретные численные примеры показывают существенные различия в разных потенциально возможных определениях для погонных транспортных оптических свойств модельной одномерной среды распространения излучения. На основе анализа полученных результатов можно теперь предложить обоснование для уточнения основных определений транспортных оптических свойств в модели КМ и ТПИ в целом.

Аргументы работы [10] по поводу равенства $K=\mu_a$, как нам представляется, вполне убедительны для принятия окончательного решения об определении погонного транспортного коэффициента поглощения в указанном виде. Транспортный коэффициент рассеяния предлагается определить, исходя из решения задачи идеального многократного рассеяния, т.е. предлагается по определению в ТПИ принять $S=\mu_s=S_m$, который определяется выражением (15). Такой идеализированный транспортный коэффициент рассеяния будет характеризовать с точки зрения его физической интерпретации многократное рассеяние в среде без поглощения. Выражение же (17), на наш взгляд, в качестве определения для коэффициента рассеяния хотя и допустимо, но методически намного слабее, т.к. приближение однократного рассеяния весьма искусственно по отношению к реальности и используется на практике намного реже. Кроме того, как показывает, например, график рис. 3а, оно, в отличие от приближения идеального многократного рассеяния, дает значительную ошибку в ряде случаев и при малом поглощении, т.е. область применимости выражения (17) определить по сравнению с (15) гораздо сложнее.

Более комплексные транспортные коэффициенты β_1 и β_2 уточненной модели КМ (9) предлагается именовать *транспортным коэффициентом ослабления* и *транспортным коэффициентом обратного рассеяния* соответственно. Это будет полностью соответствовать физической сути этих коэффициентов уравнений, которые характеризуют баланс энергии излучения на элементе среды «*dx*». При выводе дифференциальных уравнений (9) из «первых принципов» рассматривается распространение излучения на элементарном отрезке элемента среды Δx и приращение потоков, например, потока $F_+(x)$, на этом отрезке, а именно [3]:

$$\Delta F_+(x) = F_+(x+\Delta x) - F_+(x) = -\beta_1 \cdot \Delta x \cdot F_+(x) + \beta_2 \cdot \Delta x \cdot F_-(x)\,. \qquad (21)$$

Первое слагаемое в правой части (21) характеризует уменьшение прямого потока $F_+(x)$ на Δx за счет его ослабления при поглощении и рассеянии в среде, а второе слагаемое описывает увеличение прямого потока за счет вклада обратного рассеяния от потока $F_-(x)$. Поэтому, введение в теорию соответствующих понятий транспортных коэффициентов ослабления и обратного рассеяния излучения выглядит вполне логично и обоснованно.

Определение же транспортного альбедо предлагается оставить в виде (20). Оно физически призвано характеризовать соотношение процессов обратного рассеяния и ослабления излучения при взаимодействии излучения с мутной средой. Именно выражение (20) на сегодняшний день наиболее точно характеризует соотношение двух этих процессов для среды с поглощением и рассеянием, причем без ограничений на взаимные вклады каждого из процессов в общий результат. И, кроме того, такое альбедо на основе формул (13)-(14) выражается через инвариант Гершуна-Гуревича

$$W_0^*=\beta_2/\beta_1=1/J, \tag{22}$$

что делает всю систему понятий и определений в ТПИ достаточно замкнутой и более исторически преемственной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, приведенные выше аргументы теоретического плана, а также конкретные численные примеры показывают существенные различия в разных потенциально возможных определениях для разных погонных транспортных коэффициентов уравнений в общей ТПИ в целом и в моделях КМ в частности. Обоснованность в работах [10-12] положения о существовании в ряде задач светорассеивающих сред с неразделяющимися транспортными свойствами отдельно на поглощение и рассеяние заставляет по-новому взглянуть на проблему определений погонных транспортных коэффициентов рассеяния, поглощения и погонного транспортного альбедо. Предложенные в статье новые и уточненные определения этих понятий позволяют, по мнению автора, с минимальными доработками и сохранением логики классических подходов обоснованно решить указанную проблему.

Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 08-02-00769а

ЛИТЕРАТУРА

1. Kubelka, P. and Munk F., "Ein Beitrag zur Optic der Farbanstriche," *Z. Tech. Phys.*, Vol. 12, 593-601, 1931.
2. Kubelka, P., "New contribution to the optics of intensely scattering materials. Part I," J. Opt. Soc. Am., Vol. 38, 448-457, 1948.
3. Ishimaru, A., *Wave propagation and scattering in random media*, Acad. Press, New-York – London, 1978.
4. Vargas, W. E. and G. A. Niklasson, "Applicability conditions of the Kubelka-Munk theory," *Appl. Optics*, Vol. 36(22), 5580-5585, 1997.
5. Mudget, P. S. and L.W. Richards, "Multiple scattering calculations for technology", *Applied Optics,* Vol. 10, 1485-1502, 1971.
6. Brinkworth, B. J., "On the theory of reflection by scattering and absorbing media", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 4, 1105-1106, 1971.
7. Yang, L. and B. Kruse, "The Revised Kubelka-Munk Theory," *J. Opt. Soc. Am. A.*, Vol. 21, 1933-1941, 2004.
8. Murphy, A. B., "Modified Kubelka-Munk model for calculation of the reflectance of coatings with optically-rough surfaces," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 39, 3571-3581, 2006.
9. Kokhanovsky, A. A., "Physical interpretation and accuracy of the Kubelka-Munk theory", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 40, 2210-2216, 2007.
10. Rogatkin, D. A., "A specific feature of the procedure for determination of optical properties of turbid biological tissues and media in calculation for noninvasive medical spectrophotometry," *Biomedical engineering*, Vol. 41, No. 2, 59-65, 2007.
11. Lapaeva, L. G. and D. A. Rogatkin, "Improved Kubelka-Munk approach for determination of tissues optical properties in biomedical noninvasive reflectance spectroscopy", in *Proc. SPIE*, Vol. 6536, 65360Z, 2007.
12. Dmitriev, M. A., M. V. Feducova and D. A. Rogatkin, "On one simple backscattering task of the general light scattering theory," in *Proc. SPIE*, Vol. 5475, 115-122, 2004.
13. Gurevich, M. M., *Introduction in photometry*, Energiya, Leningrad, 1968 (in Russian).