

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА И РАССЕЯНИЯ СВЕТА В МУТНЫХ СРЕДАХ

Дмитриев М.А.¹⁾, Рогаткин Д.А.^{1,2)}, Федукова М.В.¹⁾

¹⁾ Московский государственный институт электроники и математики «МГИЭМ»
Б. Трехсвятительский пер. 3/12, Москва, 109028, РФ
Тел./факс: 917-08-01; email: laserrog@mtu-net.ru

²⁾ Отделение радиологии Московского областного научно-исследовательского
клинического института «МОНИКИ»
«МОНИКИ», ул. Щепкина, 61/2, Москва, 129110, РФ
Тел.: 284-56-23, Факс: 315-12-84, email: laserrog@mtu-net.ru

АННОТАЦИЯ

Хорошо известно, что в классической теории переноса и рассеяния света в мутных средах существуют серьезные трудности с получением точных и замкнутых аналитических решений для основных модельных задач, интерес к которым не ослабевает в связи с интенсивным развитием методов оптической неинвазивной диагностики в биологии и медицине. По мнению авторов статьи, существующие сложности с получением точных решений в теории переноса во многом связаны с некоторой изначальной некорректностью в принятой феноменологической формулировке исходных уравнений теории. Для более детального изучения этой проблемы в статье рассматривается одна простейшая одномерная задача рассеяния, для которой авторским методом находится точное аналитическое решение в замкнутом виде как для потока, прошедшего среду насквозь, так и для потока, выходящего из среды с ее фронтальной поверхности за счет объемного рассеяния. Полученное решение сравнивается с аналитическим решением этой же задачи на основе классической двухпоточковой модели Кубелки-Мунка (КМ). Сравнение результатов этих двух подходов позволяет наглядно обнаружить и обосновать недостатки в классической формулировке исходных уравнений КМ и предложить вариант их модификации.

1. Введение.

В связи с наблюдающимся интенсивным развитием методов оптической неинвазивной диагностики (ОНД) в биологии и медицине [1,2] не ослабевает интерес и к теоретическому моделированию процесса распространения оптического излучения в мутных (случайно-неоднородных) средах. Объясняется это, прежде всего, тем, что в реализации подавляющего большинства известных на сегодня методов ОНД (диффузионная томография, тканевая оксиметрия, флюоресцентная диагностика и т.д. [1]) ключевым элементом являются математические вычислительные алгоритмы, которые позволяют получать по данным измерений необходимую для врача информацию о биохимическом и морфологическом составе мягких тканей пациента [3,4]. Соответственно, точность и достоверность используемых вычислительных алгоритмов и расчетных физико-математических моделей играют очень большую роль в реализации всего диагностического процесса и определяют точность и достоверность всей проводимой диагностики.

Между тем, хорошо известно, что решение основных уравнений в классической теории переноса и рассеяния света в мутных средах, которая и используется сегодня как

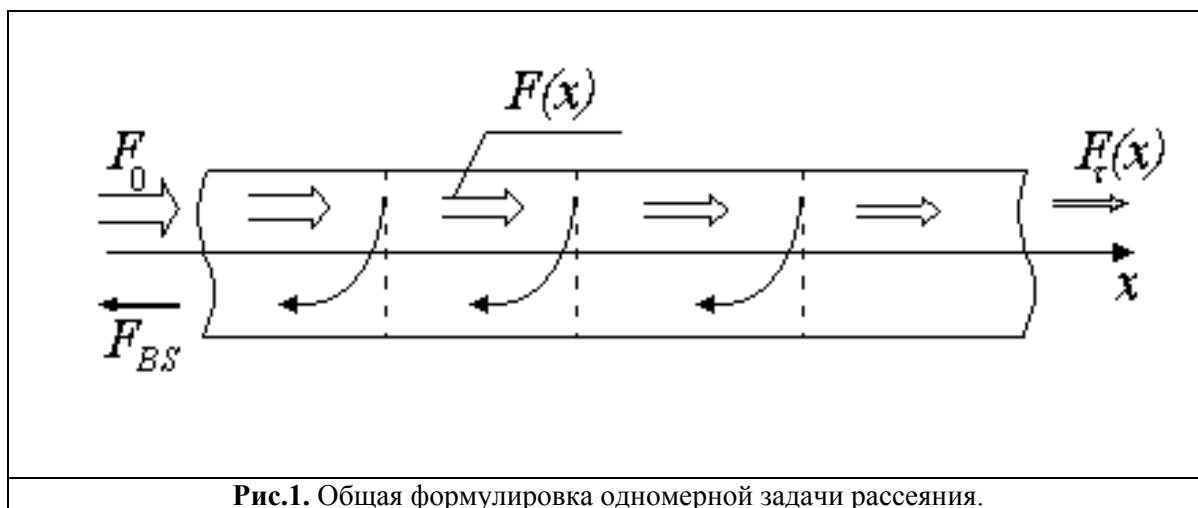
базовая теория для построения большинства вычислительных алгоритмов, сопряжено с рядом трудностей. В общем случае для уравнений теории переноса пока не найдено точных и замкнутых аналитических решений, что приводит к необходимости использования на практике различных приближений, снижающих общую достоверность получаемого на их основе медицинского диагностического результата.

Как мы неоднократно сообщали в своих публикациях [5,6], по нашему мнению существующие трудности с получением точных и замкнутых аналитических решений в теории переноса связаны с общей некорректностью в изначальной феноменологической формулировке базовых понятий и уравнений теории. Особенно это становится заметным в приложении к задачам ОНД в медицине, когда регистрируется выходящее из среды с ее фронтальной поверхности так называемое обратно-рассеянное излучение. Цель данной работы – наглядно продемонстрировать недостатки классической теории переноса на примере широко известной двухпоточковой модели Кубелки-Мунка и показать, что в теории переноса могут существовать и альтернативные классическому подходу методы формулировки основных уравнений теории, описывающих выходящие из среды потоки излучения.

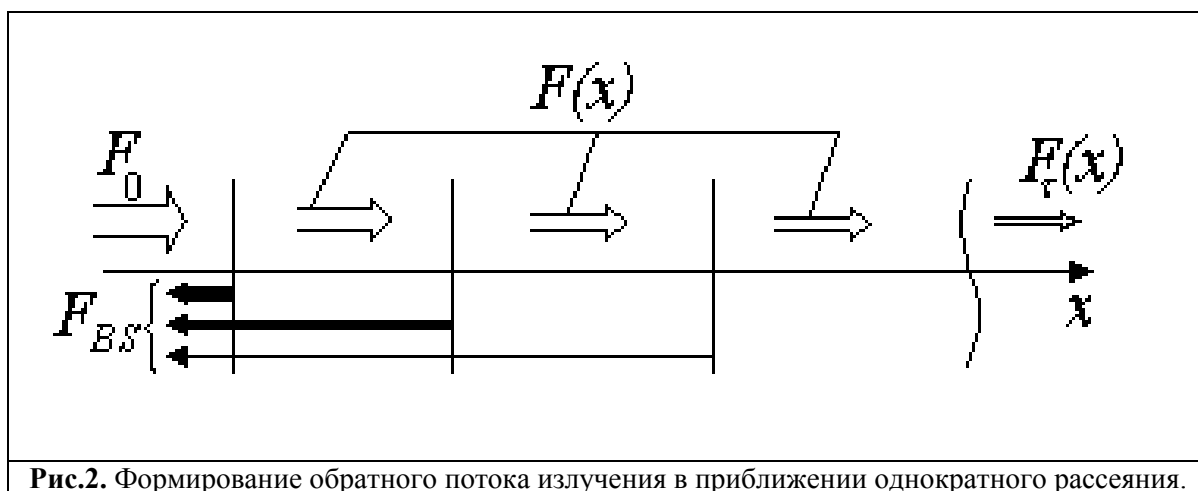
2. Основная теория.

Будем рассматривать одномерную фотометрическую задачу распространения излучения в светорассеивающей среде в приближении однократного рассеяния. Выбор такой простой модели не случаен и определяется рядом существенных преимуществ. Во-первых, одномерная модель однократного рассеяния позволяет отвлечься на время от дополнительных сложностей, связанных с определением фазовых функций рассеяния и описанием многократно повторяющегося процесса рассеяния, и сосредоточиться, главным образом, на феноменологических основах теории и определении погонных (транспортных) оптических коэффициентов среды. Во-вторых, одномерные модели теории переноса, известные, больше, как потоковые модели Кубелки-Мунка (КМ), все же имеют аналитические решения для большинства базовых задач, и это делает удобным сравнение с ними результатов, получаемых на основе любых других новых методов и подходов. Более того, именно потоковые модели КМ используются сегодня в подавляющем большинстве случаев для определения транспортных оптических коэффициентов среды на основе данных эксперимента. Поэтому тестирование моделей КМ имеет и большое прикладное значение, особенно в свете того, что в литературе укоренилось общепринятое мнение о несоответствии результатов расчетов по потоковым моделям КМ с результатами решения аналогичных задач на основе общего уравнения переноса [7]. В нашем же случае этот факт, наоборот, является еще одним дополнительным аргументом в пользу выбора именно одномерных моделей, так как, изучая причины несоответствия в результатах расчетов по моделям КМ и каким-либо другим моделям, можно попытаться обнаружить и более глубокие проблемы внутри общей теории переноса, связанные с исходной эвристической формулировкой задачи.

Общая формулировка рассматриваемой нами одномерной задачи рассеяния в приложении к задачам ОНД выглядит следующим образом (рис.1). Светорассеивающая полупрозрачная среда освещается внешним потоком излучения F_0 . Излучение проникает в среду, распространяясь вдоль оси “х”, и претерпевает внутри среды поглощение и рассеяние на неоднородностях ее внутренней структуры. Необходимо найти поток излучения F_τ , проходящий среду насквозь, и выходящий назад из среды поток обратно-рассеянного излучения F_{BS} как функции оптико-физических параметров среды.



Прежде чем приступить собственно к решению задачи сделаем несколько предварительных замечаний по поводу модельного описания процессов поглощения и рассеяния излучения в такой среде и связанных с этим способов задания транспортных оптических коэффициентов среды. Заметим сразу, что рассеяние излучения в одномерной задаче с точки зрения физики явлений может происходить лишь вследствие френелевского отражения излучения от границ встречающихся неоднородностей. Понятие дифракции излучения, как принципиально двумерного или трехмерного процесса, в одномерном случае лишено всякого смысла, что существенно упрощает исходную постановку задачи и позволяет достаточно простым образом описать рассеяние излучения внутри среды. Одномерная рассеивающая среда в этом случае просто может быть задана в виде фиксированного отрезка прямой, в определенных точках (координатах) которой расположены границы неоднородностей, от которых проходящее в среде излучение $F(x)$ частично отражается и начинает распространяться в обратном направлении (рис.2 и 3), формируя поток F_{BS} . Феноменология теории переноса не учитывает также и волновые свойства света, так что прямой и обратные потоки могут считаться не интерферирующими между собой и распространяющимися независимо друг от друга. А для приближения однократного рассеяния, которое, как было указано выше, мы и будем рассматривать, не учитывается также и вторичное рассеяние обратного потока в среде по мере его распространения назад к фронтальной поверхности.



Пусть, далее, все условные неоднородности нашей среды имеют одинаковые оптические свойства, т.е. излучение на границе любой из неоднородностей отражается от нее с коэффициентом отражения R и проходит насквозь с коэффициентом $(1-R)$. Пусть наша среда имеет конечную толщину H_0 и общее количество неоднородностей на этой толщине N (рис.3).

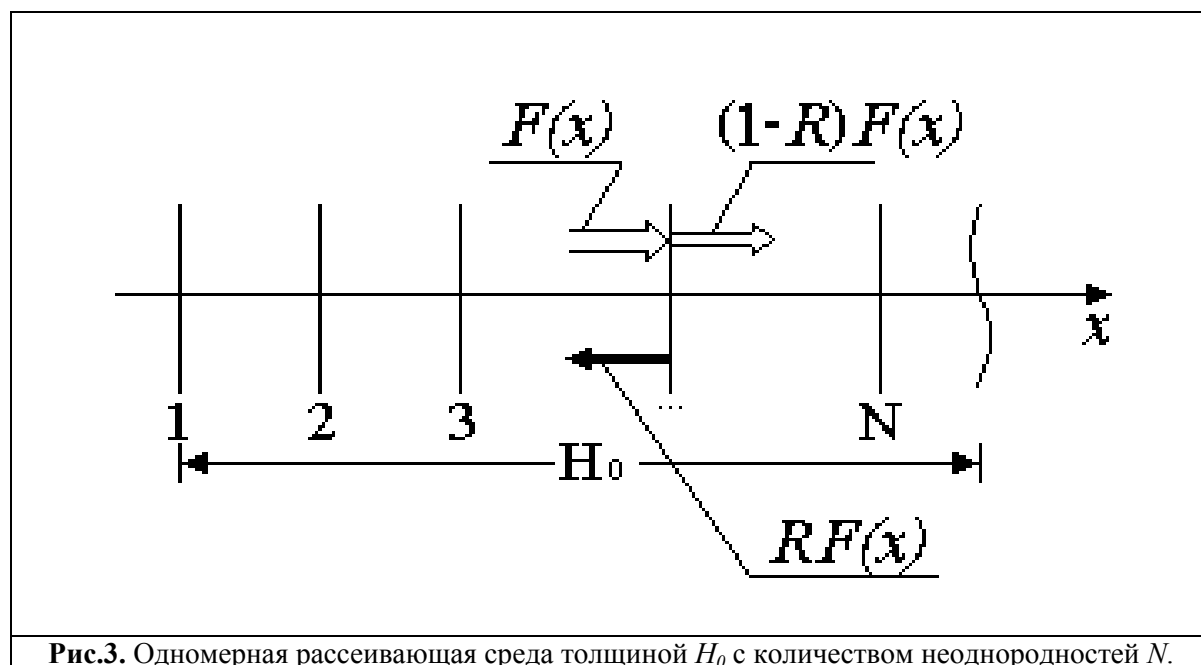


Рис.3. Одномерная рассеивающая среда толщиной H_0 с количеством неоднородностей N .

Если рассматривается идеально-рассеивающая среда, т.е. среда без поглощения, и не принимаются во внимание процессы многократного переотражения излучения между любыми двумя неоднородностями внутри среды (т.е. используется приближение однократного рассеяния), то фундаментальным решением теории переноса и метода КМ для проходящего такую среду насквозь потока излучения является простейшее уравнение:

$$F_{\tau}(H_0) = F_0 e^{-SH_0} \quad (1),$$

где: F_0 – падающий на среду внешний поток излучения, $F_{\tau}(H_0)$ – поток излучения, прошедший насквозь слой среды толщиной H_0 , S – погонный транспортный коэффициент рассеяния для среды.

Это уравнение является аналогом уравнения Бугера для идеально-рассеивающей среды. Наше же модельное представление о внутренней структуре и происходящих оптических процессах внутри такой среды позволяет записать решение для прошедшего потока и в несколько ином виде:

$$F_{\tau}(H_0) = F_0 (1 - R)^N \quad (2),$$

где R – коэффициент отражения излучения на границе неоднородности, N – количество неоднородностей на пути распространения излучения.

Эквивалентны ли эти два выражения? Заметим, что если ввести среднюю плотность неоднородностей внутри среды

$$\mu_{\rho} = N / H_0 \quad (3)$$

и рассматривать некий элемент среды толщиной H_0 то, сравнивая (1) и (2), легко получить соотношение, определяющее параметр S :

$$S = -\mu_{\rho} \ln(1 - R) \quad (4).$$

При любом другом выборе S решения (1) и (2) будут, вообще говоря, несопоставимы и отличны друг от друга.

Аналогичным образом мы можем поступить и для описания процесса поглощения излучения внутри среды. Так как поглощение будет происходить на интервалах между неоднородностями, то, полагая все эти интервалы идентичными по своим оптическим свойствам, можно считать, что на любом элементарном интервале $\Delta x = H_0 / N$ поглощается часть $a \cdot F(x)$ ($0 \leq a < 1$) проходящего по нему потока $F(x)$. В случае среды без рассеяния ($R=0$), для классической теории переноса и модели КМ мы можем записать для проходящего слой H_0 потока излучения известное соотношение Бугера:

$$F_{\tau}(H_0) = F_0 e^{-KH_0} \quad (5),$$

где K – погонный транспортный коэффициент поглощения.

Наше же представление о процессах внутри среды и ее строении позволяет записать выражение, аналогичное (2):

$$F_{\tau}(H_0) = F_0 (1 - a)^N \quad (6),$$

что позволяет определить погонный коэффициент поглощения как:

$$K = -\mu_{\rho} \cdot \ln(1 - a) \quad (7).$$

Теперь приступим собственно к решению задачи. В отличие от подхода КМ мы не будем искать выражений для прямого и обратного потоков излучения внутри среды, а сразу попытаемся составить дифференциальное уравнение для обратно-рассеянного потока F_{BS} на фронтальной поверхности среды и написать выражение для потока, прошедшего среду насквозь. Согласно классическому определению производной:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} \quad (8).$$

Так что основная сложность для нахождения dF_{BS} / dx заключается в том, чтобы грамотно задать (определить) приращение этого потока с приращением координаты Δx .

На первом этапе рассмотрим идеально-рассеивающую среду без поглощения. В приближении однократного рассеяния предполагается, что при распространении излучения в положительном направлении оси “х” оно претерпевает отражения на неоднородностях среды и за счет этого ослабляется. Отраженное излучение, распространяясь в обратном направлении в среде, уже не рассеивается на неоднородностях среды и, соответственно, не ослабляется. Поскольку среднюю плотность неоднородностей внутри среды мы определили в (3), то на любом элементе Δx содержится $\Delta x \cdot \mu_\rho$ неоднородностей. Выделим мысленно внутри среды элемент $\Delta x > H_0 / N$. Приращение потока ΔF_{BS} с приращением Δx без учета поглощения будет равно потоку, выходящему в отрицательном направлении оси “х” с элемента Δx , если на Δx падает приходящий поток $F(x)$. Для нашей модельной среды без поглощения выходящий поток, а, следовательно, и ΔF_{BS} равны:

$$\Delta F_{BS} = F(x) \cdot R \cdot \left[\sum_{i=1}^{\mu_\rho \Delta x} (1-R)^{i-1} \right] \quad (9).$$

Падающий же поток $F(x)$, согласно (2) и (3), равен

$$F(x) = F_0 (1-R)^{\mu_\rho x} \quad (10).$$

Таким образом,

$$\Delta F_{BS} = F_0 (1-R)^{\mu_\rho x} \cdot R \cdot \left[\sum_{i=1}^{\mu_\rho \Delta x} (1-R)^{i-1} \right] \quad (11).$$

Заметим, что в скобках члены суммы ряда представляют собой убывающую геометрическую прогрессию с общим множителем $(1-R) < 1$, так что нахождение этой суммы в явном виде не представляет особой сложности:

$$\sum_{i=1}^{\mu_\rho \Delta x} (1-R)^{i-1} = \frac{1 - (1-R)^{\mu_\rho \Delta x}}{R} \quad (12).$$

Найдем теперь отношение $\Delta F_{BS} / \Delta x$:

$$\frac{\Delta F_{BS}}{\Delta x} = \frac{F_0 (1-R)^{\mu_\rho x} \left[1 - (1-R)^{\mu_\rho \Delta x} \right]}{\Delta x} \quad (13).$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ выражение (13) представляет собой неопределенность вида $0/0$ и предел приращения можно найти, раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{BS}}{\Delta x} = -\mu_\rho F_0 (1-R)^{\mu_\rho x} \cdot \ln(1-R) = \frac{dF_{BS}}{dx}. \quad (14).$$

Таким образом, общее решение поставленной задачи:

$$F_{BS} = \int_0^{H_0} (-\mu_\rho F_0 (1-R)^{\mu_\rho x} \cdot \ln(1-R)) dx = F_0 (1 - (1-R)^{\mu_\rho H_0}) \quad (15).$$

Или, с учетом (4), окончательно:

$$F_{BS} = F_0 (1 - e^{-SH_0}) \quad (16).$$

Надо сказать, что результат (15) для идеально-рассеивающей среды был, вообще говоря, весьма ожидаем, и является, естественно, следствием выражений (2) и (3). В отсутствие поглощения назад обязано выходить все не прошедшее среду насквозь излучение. К точно такому же результату, как и (16), приводит и стандартный подход КМ, если принять во внимание соотношения (1), (4) и (5). В этом смысле, казалось бы, результат (16) тривиален. Однако он, помимо того, что будет необходим нам для дальнейшего анализа, сам по себе имеет уже несколько примечательных особенностей. Во-первых, при интегрировании (15) для получения (16) нет необходимости в использовании каких-либо дополнительных априорных граничных условий, т.е. отсутствуют неизвестные константы интегрирования. Уместно напомнить, что, например, в методе КМ, когда рассматривается поток обратного излучения внутри среды, требуется формулировка дополнительных граничных условий на правой границе среды. А, во-вторых, этот результат при сравнении с результатом, полученным путем решения системы дифференциальных уравнений по методу КМ, показывает, что метод КМ, как минимум в случае идеально-рассеивающей среды, также дает, вопреки укоренившимся данным литературы, строгое и точное решение поставленной задачи.

Теперь рассмотрим ту же самую задачу, но с учетом поглощения излучения на интервалах между неоднородностями внутри среды. Снова предположим, для простоты вычислений, что все интервалы между неоднородностями являются равновеликими и обладают идентичными поглощающими свойствами. Используя предложенную методику для определения F_{BS} с учетом полученных ранее соотношений (6), (7), (9-15) легко получить следующее решение:

$$F_{BS} = \frac{RF_0}{1-Y} \left(1 - Y^{\mu_\rho H_0} \right) \quad (17),$$

где $Y = (1-R)(1-a)^2$.

При этом предполагалось, что излучение поглощается на интервалах между неоднородностями, как при прямом его распространении в среде, так и при обратном. При $a=0$ решение (17) полностью переходит в (15) и (16), как и следовало бы по логике задачи.

Стандартный подход КМ [7] в приближении однократного рассеяния с учетом поглощения излучения в среде предполагает решение следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dF_+(x)}{dx} = -(K + S)F_+(x) \\ \frac{dF_-(x)}{dx} = KF_-(x) - SF_+(x) \end{cases}, \quad (18)$$

где $F_+(x)$ и $F_-(x)$ – потоки излучения в среде, распространяющиеся в прямом и обратном направлениях оси “х” соответственно.

Он дает решение поставленной задачи в виде:

$$F_{BS} = F_-(0) = \frac{SF_0}{2K + S} \cdot (1 - e^{-(2K+S)H_0}) \quad (19).$$

Чтобы решения (17) и (19) были идентичны, необходимо потребовать выполнение условий для погонных транспортных коэффициентов среды в виде:

$$\begin{aligned} S &= \frac{R}{1-Y} (-\mu_\rho) \cdot \ln Y \\ K &= \frac{1-Y-R}{2(1-Y)} (-\mu_\rho) \cdot \ln Y. \end{aligned} \quad (20).$$

Таким образом, можно видеть, что зависимость транспортных коэффициентов среды в классической модели КМ от реальных оптических свойств среды (“R” and “a”) при учете поглощения существенно усложнилась. Оба коэффициента оказались зависимы как от поглощающих, так и от рассеивающих свойств среды. Более того, зависимость (20), удовлетворяющая идентичности решений для обратно-рассеянных потоков излучения, не удовлетворяет условию идентичности решений этой же задачи для потоков, проходящих среду насквозь. Так, решение системы (18) для прошедшего потока имеет вид:

$$F_\tau(H_0) = F_+(H_0) = F_0 e^{-(K+S)H_0} \quad (21).$$

Наш же метод дает решение в виде

$$F_\tau(H_0) = F_0 (1-R)^{\mu_\rho H_0} (1-a)^{\mu_\rho H_0} \quad (22)$$

и для равенства (21) и (22) необходимо сохранить соотношения для транспортных коэффициентов среды в формах (5) и (7), дающих более однозначную и отдельную зависимость этих коэффициентов от истинных параметров поглощения и рассеяния в среде.

Таким образом, наблюдается явное противоречие в определении параметров среды для модели КМ через реальные оптико-физические свойства среды. Наше же решение напрямую оперирует лишь истинными физическими параметрами среды. Мы не поль-

зовались в своем подходе, например, таким дополнительным параметром, как погонный коэффициент рассеяния, физический смысл которого может быть, на самом деле, более сложным, чем это кажется на первый взгляд из его простого названия.

3. Обсуждение полученных результатов.

Обсудим полученные результаты. Во-первых, заметим, что решения (15), (17) и (22) являются строгими и точными решениями задачи в рамках используемого приближения однократного рассеяния, т.к. при их выводе не делалось никаких дополнительных упрощений и допущений. Однако получены они способом, несколько отличающимся от классического подхода КМ. В частности, в предлагаемом методе сразу формулируется дифференциальное уравнение для обратно-рассеянного потока. Во-вторых, сравнение результатов предложенного метода и классического подхода КМ показывает, что транспортные коэффициенты среды в методе КМ имеют в общем случае достаточно сложную зависимость (20) от реальных оптических свойств среды. Можно сказать, что они являются, скорее, не реальными, а некоторыми “эффективными” параметрами для среды распространения излучения. Недавно мы сообщали о получении схожих результатов при рассмотрении аналогичной одномерной задачи в среде без поглощения, но с учетом многократного рассеяния [5]. Там нами было получено условие для транспортного коэффициента рассеяния в виде:

$$S = \frac{R\mu_p}{1 - R}. \quad (23).$$

Сравнение (23) с условиями (4) и (20) наглядно демонстрирует нам также и явное изменение соотношений для параметра S в зависимости от модельной постановки задачи. Поэтому, можно сделать и еще один, более глубокий вывод, что параметр S в модели КМ и общей теории переноса является, скорее, *параметром выбранной модельной постановки задачи, нежели реальным оптическим свойством среды*. (Собственно, в классической электродинамике такого особого оптического свойства среды, как погонное рассеяние, и нет).

Кроме того, не может ни обращать на себя внимание и удручающее противоречие между результатом (20) и решениями (21) и (22). Поскольку наши решения (15), (17), (22) и (23) являются математически строгими и точными, *остается предположить, что в исходной формулировке дифференциальных уравнений КМ существует некая ошибка или изначальная некорректность*, которая и приводит к появлению указанного противоречия. Причем эта ошибка отсутствует для среды без поглощения и появляется только с учетом поглощения в среде.

Не останавливаясь на излишне подробных рассуждениях, покажем, что избавиться от этой ситуации позволяет небольшая модификация (18). Запишем систему КМ для задачи однократного рассеяния в виде:

$$\begin{cases} \frac{dF_+(x)}{dx} = -(K + S)F_+(x) \\ \frac{dF_-(x)}{dx} = KF_-(x) - S'F_+(x) \end{cases} \quad (24),$$

где S' - дополнительный транспортный коэффициент рассеяния, не равный S .

Решение (24) имеет схожий с (19) вид

$$F_{BS} = F_-(H_0) = \frac{S' F_0}{2K + S} e^{-(K+S)H_0} \quad (25),$$

но соотношения для коэффициентов этих двух моделей с учетом (25) принимают более простую и физически понятную форму, удовлетворяющую, в том числе, и решению для прошедшего среды потока излучения:

$$K = -\mu_\rho \ln(1 - a)$$

$$S = -\mu_\rho \ln(1 - R),$$

$$S' = \frac{R}{Y'} (2K + S)$$

где $Y' = 1 - (1 - R) \cdot (1 - a)^2$.

При $a=0$, $K=0$ и $S'=S$, что полностью удовлетворяет всем полученным ранее соотношениям. Таким образом, мы видим, что в классической модели КМ (то же самое можно сказать и об общей теории переноса) при наличии поглощения в среде **некорректно постулируется полное преобразование рассеянного прямого потока в обратный**. На самом деле, за счет поглощения не весь рассеянный прямой поток преобразуется в поток излучения, распространяющийся в обратном направлении. Часть его поглощается в среде уже на этапе преобразования. Принятие такого допущения приводит к полной идентичности решений по предложенному нами подходу и модели КМ, однако модель КМ при этом несколько усложняется введением третьего параметра S' . Такое положение вещей с исходной некорректностью уравнений КМ, видимо, было не замечено до настоящего времени. Учет же этого обстоятельства может оказать существенное влияние на методы обработки результатов экспериментов по определению оптических свойств биотканей, т.к., еще раз повторим, подавляющее большинство результатов экспериментов в современной биомедицинской оптике и оптике светорассеивающих сред обрабатываются сегодня на основе уравнений классического метода КМ.

4. Заключение.

В связи с существующей проблемой с получением замкнутых и аналитических решений в классической теории переноса и рассеяния света в мутных средах поиск путей развития теории является весьма актуальным. В данной работе на примере простой одномерной задачи в приближении однократного рассеяния изучались недостатки общей теории переноса и, в частности, двухпоточковой модели Кубелки-Мунка (КМ). В том числе изучалась возможность альтернативной формулировки исходных дифференциальных уравнений теории для определения потока излучения, выходящего из среды с ее фронтальной поверхности за счет актов внутреннего светорассеяния. Показано, что возможна формулировка задачи, когда в качестве исходного дифференциального уравнения выступает одно единственное уравнение для значения обратно-рассеянного потока непосредственно на поверхности среды. Более того, сравнение результатов пред-

ложенного подхода с результатами, полученными на основе стандартной двухпоточковой модели КМ, выявило у последней целый ряд существенных недостатков и проблем. Например, транспортные коэффициенты среды, используемые в ней, являются на самом деле эффективными и усредненными параметрами, зависящими, в том числе, и от исходной модельной постановки задачи. Кроме того, в стандартной модели КМ некорректно постулируется полное преобразование рассеянного прямого потока в поток, распространяющийся в обратном направлении. Все это приводит к сложной зависимости транспортных коэффициентов модели от реальных оптических свойств среды и не позволяет использовать одни и те же коэффициенты в решениях для прямого и обратного потоков. Для устранения этих недостатков предложен способ модификации стандартной модели КМ, заключающийся во введении дополнительного транспортного коэффициента среды, характеризующего преобразование прямого потока излучения в обратный поток внутри среды с учетом поглощения части потока уже на этапе его преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рогаткин Д.А., Лапаева Л.Г. Перспективы развития неинвазивной спектрофотометрической диагностики в медицине. / Медицинская техника, №4, 2003. – с.31-36.
2. Тучин В.В. Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. – Саратов: СГУ, 1998. – 384с.
3. Rogatkin D.A., Tchernyi V.V. Mathematical simulation as a key point of the laser fluorescent diagnostic technique in oncology. / Laser Use in Oncology II // Proc. SPIE, v.4059, 1999. – p.73-78.
4. Rogatkin D.A., Tchernyi V.V. The way to universal and correct medical presentation of diagnostic information for complex spectrophotometry noninvasive medical diagnostic systems - Proc. SPIE "Optical tomography and spectroscopy of tissue V", v. 4955, 2003. - p.554-558.
5. Рогаткин Д.А. Развитие двухпоточковой модели Кубелки-Мунка для решения одномерных задач распространения света в светорассеивающих биологических тканях и средах. / Оптика и спектроскопия, т.87, №1, 1999. – с.109-113.
6. Rogatkin D.A., Svirin V.N., Tchernyi V.V. Problems of theoretical calculation of the laser light distribution in biological tissues. / SPIE Proc., v. 4162, 2000. – pp. 189-193.
7. Ishimaru A. Wave propagation and scattering in random media – Acad. Press., New-York - London, 1978.